ΛΥΣΕΙΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2001

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 304

Α.2. Θεωρία

Β.1.

$f''(x) = 6x + 4 \Leftrightarrow (f'(x))' = (3x^2 + 4x)' \Leftrightarrow$
$f'(x) = 3x^2 + 4x + c_1$

Για $x = 0$ έχουμε $f'(0) = c_1$

Όμως από υπόθεση $f'(0) = 2$, άρα $c_1 = 2$

Οπότε $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 + 2x^2 + 2x)' \Leftrightarrow$
$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + c_2$

Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = c_2$

Όμως από υπόθεση $f(0) = 3$, άρα $c_2 = 3$

Οπότε $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

Β.2.

α. $\int_0^1 (e^x + x)dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = e + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{2}$

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}dx = 3\int_1^4 x^2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}dx = 3\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx = 3\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 3\left[\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{6}{5}$

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2ημx + 3συνx)dx = [-2συνx + 3ημx]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(-2συν\frac{\pi}{2} + 3ημ\frac{\pi}{2}\right) - (-2συν0 + 3ημ0)$

$= 3 + 2 = 5$

ΘΕΜΑ 2ο

α.

Έστω $z = x + yi$.

$|z + 16| = 4|z + 1| \Leftrightarrow |x + yi + 16| = 4|x + yi + 1|$

$$\sqrt{(x+16)^2 + y^2} = 4\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$
$$x^2 + 32x + 256 + y^2 = 16(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$
$$15x^2 + 15y^2 = 240$$
$$x^2 + y^2 = 16 .$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα $\rho = 4$.

β.

Έστω $z = x + yi$ τότε

$|z - 1| = |z - i| \Leftrightarrow |x + yi - 1| = |x + yi - i|$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$
$$y = x$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η διχοτόμος της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων

γ.

Οι μιγαδικοί που επαληθεύουν τα (α) και (β) προκύπτουν από την λύση του

συστήματος $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow (x = 2\sqrt{2} \text{ και } y = 2\sqrt{2})$ ή

$(x = -2\sqrt{2} \text{ και } y = -2\sqrt{2})$

Οπότε οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τα (α) και (β) είναι οι

$z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$ και $z_2 = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$

Για τον z_1 έχουμε $\rho_1 = |z_1| = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$ και

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta\mu\varphi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ οπότε $z_1 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)$

Για τον z_2 έχουμε $\rho_2 = |z_2| = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$ και

$$\sigma\upsilon\nu\varphi_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta\mu\varphi_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα $\varphi_2 = \frac{5\pi}{4}$ οπότε $z_2 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4} + i\eta\mu\frac{5\pi}{4}\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

α.

$$\lim_{x\to1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\left(1-e^{-x+1}\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{e^{-x+1}}{1}=1$$

β.

Θα πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+\alpha)=1+\alpha$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(1-e^{-x+1})\ln(x-1)$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{\left(1-e^{-x+1}\right)}{x-1}(x-1)\ln(x-1)\right]$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[\frac{(1-e^{-x+1})}{x-1}(x-1)\ln(x-1)\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}\ \lim_{x\to1^+}\left[(x-1)\ln(x-1)\right]\quad \textbf{(1)}$$

Από το (α), έχουμε $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}=0$

Είναι δε $\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x-1)\ln(x-1)\right]=0(-\infty)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x-1}}=\left(\dfrac{-\infty}{+\infty}\right)$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\left[\ln\left(x-1\right)\right]'}{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-1}{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\left[-\left(x-1\right)\right]=0$$

Επομένως η (1) γίνεται $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to1^+}[(x-1)\ln(x-1)]=0$

Ακόμα είναι $f(1)=1+\alpha$

Άρα θα πρέπει $1+\alpha=0 \iff \alpha=-1$

γ.

Για $\alpha=-1$ η f είναι συνεχής στο $[1,\ 2]$

παραγωγίσιμη στο $(1,\ 2)$

και $f(1)=0=f(2)$

Οπότε με βάση το θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,\ 2)$ έτσι ώστε

$f'(\xi) = 0$ δηλαδή η εφαπτομένη στο σημείο $A(\xi,\ f(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα των x.

ΘΕΜΑ 4ο

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}dt \quad , \ x > 0$$

α.

Έχουμε $f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{tf(t)}{x^2}dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0\ ,\ +\infty)$ και t συνεχής, η συνάρτηση tf(t) είναι συνεχής στο $(0\ ,\ +\infty)$ ως πράξεις συνεχών. Οπότε η συνάρτηση $\int_1^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ +\infty)$ και επομένως και η συνάρτηση

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων

β.

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt \ , \ x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 f(x) = x + \int_1^x tf(t)dt$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε $2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 + xf(x) \quad \Leftrightarrow$

$$xf(x) + x^2 f'(x) = 1$$

$$f(x) + xf(x) = \frac{1}{x}$$

$$(xf(x))' = (\ln x)'$$

$$xf(x) = \ln x + c \qquad \textbf{(1)}$$

Για $x = 1$ έχουμε $c = f(1)$

Η δοσμένη $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\int_1^x tf(t)dt$ για $x = 1$ δίνει $f(1) = 1 + \int_1^1 tf(t)dt = 1 + 0 = 1$

Άρα $c = 1$, οπότε η (1) γίνεται $xf(x) = \ln x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1+\ln x}{x} \ , \ x > 0$

γ.

$$f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$

Πρόσημο της f' και μονοτονία της f

x	0	1	$+\infty$
f'	+	0	−
f	↗	|	↘

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1$

Ακόμα

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1+\ln x)\frac{1}{x}\right]$

$$= \lim_{x\to 0^+}(1+\ln x)\cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$$
$$= (1-\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (-\infty\ ,\ 1]\cup(0\ ,\ 1] = (-\infty\ ,\ 1]$

δ.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Και αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη

ε.

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[1,\ e]$ στο οποίο η f είναι συνεχής και προφανώς $f(x) > 0$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

Θέτω $1+\ln x = u$, οπότε $du = \frac{1}{x}dx$ και όταν $x = 1$ τότε $u = 1$

όταν $x = e$ τότε $u = 2$

Οπότε $E = \int_1^2 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}$ τετραγωνικές μονάδες